הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל הפקולטה למתמטיקה 15 במאי 2005

פתרונות מלאים

אלגברה-1-מ' (104016) – בוחן ביניים – סמסטר אביב תשס"ה

פרטי הסטודנט:

שם משפחה ..... שם פרטי .....

מספר תעודת זהות ..... פקולטה .....

הוראות: משך הבוחן שעתיים, והוא מורכב משש שאלות. על כל שאלה יש לענות בצירוף הסבר **קצר אך מלא ומסודר.** יש לכתוב את הפתרון **בשני צדי הדף**. אם הדף אינו מספיק אפשר להמשיך את הפתרון בשני הדפים האחרונים , תוך ציון ברור של המקום. את כל עבודת הטיוטה יש לבצע **רק** במחברת המצורפת **ולא** בשאלון הבוחן. אין להגיש את מחברת הטיוטה. **אסור** להשתמש בדפי עזר, במחשבונים או בטלפונים. **בהצלחה!**

שאלה 1 (15%).

בכל אחד מהסעיפים הבאים הוכח את הטענה אם היא נכונה, או הפרך אותה באמצעות דוגמה נגדית.

(א) אם A , B שתי מטריצות מסדר $n\times n$ המקיימות $AB=O$, אז $r(A)+r(B)\le n$.

(ב) אם A , B שתי מטריצות מסדר $n\times n$ המקיימות $A+B=O$, אז $r(A)+r(B)\le n$.

(ג) אם A מטריצה מסדר $n\times n$, והיא תלויה ליניארית במטריצה המוחלפת A^T , אז בהכרח המטריצה A היא סימטרית או אנטי-סימטרית.

פתרון:

א. **הטענה נכונה**:

הוכחה: נסמן ב- B^j את עמודות המטריצה B. לפי הנתון, AB = 0 כלומר לכל j=1,…,n מתקיים $AB^j = 0$, כלומר לכל j=1,…,n B^j שייך למרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית Ax = 0. נסמן מרחב זה ב- W (כלומר W הוא מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית Ax=0). לפי משפט, dimW = n-r(A), כלומר כל עמודות B שייכות למרחב שמימדו n-r(A), ולכן מימד מרחב העמודות של B קטן או שווה מהמימד של W. אבל מימד מרחב העמודות של B שווה ל- r(B), לכן קיבלנו, $r(B) \le n-r(A)$ או $r(A)+r(B) \le n$.

ב. **הטענה לא נכונה**:

דוגמא נגדית: נבחר: A = I ו- B=-I אז r(A) = r(B) = n, כלומר r(A) + r(B) = 2n > n .

ג. **הטענה נכונה**:

הוכחה: אם המטריצות A ו- A^t תלויות ליניאריות אז קיים סקלר α כך ש- $A=\alpha A^t$. נבצע מוחלפת לשני האגפים ונציב A^t:

$$A=\alpha A^t$$
$$(A)^t=\left(\alpha A^t\right)^t$$
$$A^t=\alpha A=\alpha\alpha A^t=\alpha^2 A^t$$
$$A^t=\alpha^2 A^t$$

אפשרות ראשונה: $\alpha^2=1$ כלומר $\alpha=\pm 1$, נציב ונקבל:

אם $\alpha=1$ אז $A=\alpha A^t=A^t$ כלומר A סימטרית;

אם $\alpha=-1$ אז $A=\alpha A^t=-A^t$ כלומר A אנטי סימטרית.

אפשרות שנייה: $A^t=0$ לכן גם $A=0$, כלומר A היא סימטרית וגם אנטי סימטרית.

<u>שאלה 2 (20%).</u>

(א) יהי $w=\dfrac{1+z}{1-z}$ באשר $z\neq 1$ מספר מרוכב. הוכח ש- $\mathrm{Re}(w)\geq 0$ אם ורק אם $|z|\leq 1$.

(ב) פתור את המשוואה $(2+i)z^2-(5-i)z+2-2i=0$. רשום את הפתרונות בצורה רגילה $z=a+bi$, באשר a,b מספרים ממשיים.

<u>פתרון:</u>

א. נפשט את w כדי למצוא את $\mathrm{Re}(w)$:

מאחר ונתונה מנה נכפול בצמוד של המכנה, כלומר ב- $\overline{1-z}=\bar{1}-\bar{z}=1-\bar{z}$. עוד נזכור כי לכל מספר מרוכב z מתקיים:

1. $|z|\geq 0$
2. $z\cdot\bar{z}=|z|^2$ ממשי חיובי לכל $z\neq 0$.
3. $z-\bar{z}=2i\,\mathrm{Im}(z)$ מספר מדומה טהור

$$w=\frac{1+z}{1-z}$$

$$\frac{1+z}{1-z}\cdot\frac{1-\bar{z}}{1-\bar{z}}=\frac{(1+z)(1-\bar{z})}{|1-z|^2}=\frac{1+z-\bar{z}-z\bar{z}}{|1-z|^2}=\frac{1-|z|^2+2i\,\mathrm{Im}\,z}{|1-z|^2}\quad\Rightarrow$$

$$\mathrm{Re}(w)=\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$$

$$\mathrm{Re}(w)\ge 0\quad\overset{|1-z|^2>0}{\Leftrightarrow}\quad 1-|z|^2\ge 0\quad\Leftrightarrow\quad 1\ge|z|^2\quad\Leftrightarrow\quad |z|\le 1$$

ב. יש לפתור את המשוואה $(2+i)z^2-(5-i)z+2-2i=0$ ולהביע את הפתרונות בייצוג אלגברי:

$$(2+i)z^2-(5-i)z+2-2i=0$$

$$z_{1,2}=\frac{(5-i)\pm\sqrt{(5-i)^2-4(2+i)(2-2i)}}{2(2+i)}=\frac{(5-i)\pm\sqrt{(25-10i-1)-4(4+2i-4i+2)}}{2(2+i)}=$$

$$\frac{(5-i)\pm\sqrt{(24-10i)-4(6-2i)}}{2(2+i)}=\frac{(5-i)\pm\sqrt{24-10i-24+8i}}{2(2+i)}=\frac{(5-i)\pm\sqrt{-2i}}{2(2+i)}=\frac{(5-i)\pm\sqrt{-2i}}{2(2+i)}$$

$$z_{1,2}=\frac{(5-i)\pm\sqrt{-2i}}{2(2+i)}$$

נחשב את $\sqrt{-2i}$ (מאחר ונקבל שני פתרונות מרוכבים, שסכומם 0, כלומר מנוגדי סימן, אין צורך לקחת פלוס ומינוס השורש).

$$-2i=2cis270$$

$$\sqrt{-2i}=\sqrt{2cis270}=\sqrt{2}cis\frac{270+360k}{2}\quad k=0,1$$

$$\sqrt{2}cis135=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-1+i$$

$$\sqrt{2}cis315=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=1-i$$

נציב לקבלת z_1 ו- z_2:

$$z_1=\frac{(5-i)+(-1+i)}{2(2+i)}=\frac{4}{2(2+i)}=\frac{2}{(2+i)}=\frac{2(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{4-2i}{5}=\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i$$

$$z_2=\frac{(5-i)+(1-i)}{2(2+i)}=\frac{6-2i}{2(2+i)}=\frac{3-i}{(2+i)}=\frac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{6-2i-3i-1}{5}=\frac{5-5i}{5}=1-i$$

<u>שאלה 3 (20%).</u>

יהיו U ו- W שני התת-מרחבים הבאים של המרחב $R^{2\times 2}$ של המטריצות הממשיות מסדר 2×2:

$$U=\left\{\begin{pmatrix}-x-y & x\\ y & 0\end{pmatrix} \mid x,y\in R\right\} \qquad W=span\left\{\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}.$$

(א) מצא בסיס ומימד ל- U.

(ב) מצא בסיס ומימד ל- W.

(ג) השלם את הבסיס שמצאת ל- W לבסיס לכל המרחב $R^{2\times 2}$.

(ד) מצא בסיס ומימד ל- $U+W$.

(ה) מצא את $\dim(U\cap W)$.

(ו) האם $U\oplus W=R^{2\times 2}$? נמק!

<u>פתרון:</u>

א. בסיס ומימד ל- U. נתון איבר כללי, לכן נוציא סקלרים לקבלת קבוצה פורשת, נשמיט תלויים ונקבל בסיס ומימד:

$$U=\left\{\begin{pmatrix}-x-y & x\\ y & 0\end{pmatrix} \mid x,y\in R\right\}$$

$$\begin{pmatrix}-x-y & x\\ y & 0\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$U=span\left\{\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

מאחר ושתי המטריצות בקבוצה הפורשת אינן פרופורציונאליות הן גם בלתי תלויות ליניאריות ולכן בסיס ל- U.

לסיכום, בסיס ל- U הוא $\left\{\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$ ו- $\dim U=2$.

ב. בסיס ומימד ל- W: נתונה קבוצה פורשת, ולכן נבדוק תלות ליניארית ע"י דרוג וקטורי הקואורדינאטות לפי הבסיס הסטנדרטי של המטריצות בקבוצה הפורשת:

$$W = span\left\{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{R_2 \to R_2 - R_1}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{R_3 \to R_3 - R_2}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{R_1 \to R_1 + R_2}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{R_2 \to \frac{1}{2}R_2}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$W = span\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right\}$$

קיבלנו שלא התאפסה אף שורה בדרוג ולכן שלושת המטריצות הפורשות הן גם בלתי תלויות ליניארית ומהוות בסיס ל- W, או ניתן לקחת את הבסיס שהתקבל אחרי דרוג.

לסיכום, בסיס ל- W הוא: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right\}$ ו- $\dim W = 3$.

ג. מאחר ו- $\dim W = 3$ ו- $\dim R^{2\times 2} = 4$, הרי שעלינו להוסיף מטריצה אחת מסדר 2×2 לקבוצה הפורשת את W כך שנקבל 4 מטריצות 2×2 בלתי תלויות ליניאריות. מאחר ובמרחב ממימד 4, כל 4 וקטורים בלתי תלויים ליניארית מהווים בסיס, הרי שנקבל בסיס למרחב $R^{2\times 2}$. תחילה נשלים את מטריצת הקואורדינאטות שדרגנו בסעיף ב' למטריצה מדרגה 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן, מטריצה המשלימה את הבסיס של W לבסיס של כל $R^{2\times 2}$ היא: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ד. לפי משפט, איחוד בסיסים של W ושל U נותן קבוצה פורשת למרחב $U+W$, לכן, למציאת בסיס ל- $U+W$ נדרג בסיס של U ובסיס של W:

$$W = span\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right\}$$

$$U = span\left\{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_4 \to R_4 + R_1 \\ R_5 \to R_5 + R_1}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{R_4 \to R_4 + R_3}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו 4 שורות שונות מ- 0, לכן $\dim(U+W) = 4 = \dim R^{2\times 2}$, וכל בסיס של $R^{2\times 2}$ הוא בסיס של $U+W$.
ניתן לקחת את הבסיס המתקבל מהמטריצה שזה עתה דרגנו, או את הבסיס הסטנדרטי של $R^{2\times 2}$ או כל בסיס אחר של $R^{2\times 2}$:

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

ה. יש לחשב את $\dim(U \cap W)$: לפי משפט המימדים, והחישובים בסעיפים הקודמים נקבל:

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) = 2 + 3 - 4 = 1$$

ו. לפי סעיף ד', $U + W = R^{2\times 2}$. לפי סעיף ה', $U \cap W \neq \{0\}$ לכן הסכום לא ישר, כלומר $U \oplus W \neq R^{2\times 2}$.

שאלה 4 (12%).

הוכח את הטענות הבאות:

(א) אם $v_1, v_2, \ldots, v_k$ הם וקטורים בלתי תלויים ליניארית במרחב וקטורי V, ו- u הוא וקטור ב- V אשר **איננו** צירוף ליניארי שלהם, אז הקבוצה $\{v_1, v_2, \ldots, v_k, u\}$ היא בלתי תלויה ליניארית.

(ב) תהי A מטריצה מסדר 5×4, ונתון שהמערכת הליניארית $Ax=b$ פתירה אם ורק אם b הוא וקטור עמודה שבו הרכיב השני והרביעי שווים ל- 0. אז קיים ב- R^4 וקטור עמודה c אשר עבורו המערכת הליניארית $A^T x=c$ איננה פתירה (A^T היא המטריצה המוחלפת של A).

פתרון:

א. נוכיח בשתי דרכים:

1. **לפי הגדרת תלות ליניארית**: יהיו $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \beta$ סקלרים כך ש- $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k + \beta u = 0$.

יש להראות שכל הסקלרים הם 0.

אם $\beta \neq 0$. נעביר את β·u אגף ונחלק ב- β:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k + \beta u = 0$$
$$-\beta u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k$$
$$u = -\frac{\alpha_1}{\beta} v_1 - \frac{\alpha_2}{\beta} v_2 - \ldots - \frac{\alpha_k}{\beta} v_k$$

וקיבלנו כי u צירוף ליניארי של $v_1, v_2, \ldots, v_k$ בניגוד לנתון, לכן בהכרח $\beta = 0$.

נציב בשוויון הנ"ל ונישאר עם הצרוף הליניארי $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k = 0$.

מאחר ונתון כי $v_1, v_2, \ldots, v_k$ בלתי תלויים ליניארית, הרי שכל המקדמים הם 0, כלומר:

$\alpha_1 = \alpha_2 =, \ldots, = \alpha_k = \beta = 0$, ולפי הגדרה, הקבוצה $\{v_1, v_2, \ldots, v_k, u\}$ היא בלתי תלויה ליניארית כנדרש.

2. **באמצעות המשפט**: "קבוצת וקטורים שאינה מכילה את וקטור ה- 0 היא תלויה ליניארית אם"ם קיים וקטור שהוא קומבינציה ליניארית של קודמיו".

כדי להשתמש במשפט זה, עלינו לוודא שכל הוקטורים בקבוצה שונים מווקטור ה- 0: $v_1, v_2, \ldots, v_k$ הם בלתי תלויים ליניארית לכן הקבוצה אינה מכילה את וקטור ה- 0 (כי כל קבוצה המכילה את וקטור ה- 0 היא תלויה ליניארית). u שונה מווקטור ה- 0 שכן אם היה שווה לווקטור ה- 0 הרי שניתן היה לכתיבה כקומבינציה ליניארית של $v_1, v_2, \ldots, v_k$ ע"י בחירת כל המקדמים 0, וזה סותר את הנתון. מכאן, כי הקבוצה $\{v_1, v_2, \ldots, v_k, u\}$ אינה מכילה את וקטור ה- 0. אם נניח בשלילה שהקבוצה תלויה ליניארית, הרי שלפי

המשפט קיים ווקטור שהוא צרוף ליניארי של קודמיו. זה לא יכול להיות אחד מה-v-ים כי נתון שהקבוצה $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ היא בלתי תלויה ליניארית, ולכן זה בהכרח הווקטור u, כלומר u הוא צרוף ליניארי של $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ בסתירה לנתון. לכן, בהכרח הקבוצה $\{v_1, v_2, ..., v_k, u\}$ היא בלתי תלויה ליניארית.

ב. A היא מטריצה 4×5, ולכן A^T היא מטריצה מסדר 5×4, ובנוסף מתקיים כי $r(A^T) = r(A) \leq 4$.

כדי להוכיח שקיים ב-R^4 וקטור עמודה c אשר עבורו המערכת הליניארית $A^T x = c$ איננה פתירה, יש להוכיח כי $r(A^T)=r(A)<4$ (כי אם מתאפסת שורה בדרוג של מטריצה B אז תמיד קיים וקטור עמודה c עבורו למערכת $Bx=c$ אין פתרון).

להלן 3 נימוקים שונים לכך ש- $r(A^T)=r(A)<4$ (או $r(A^T)=r(A)\leq 3$):

1. כידוע, לפי משפט למערכת Ax = b יש פתרון אם"ם העמודה b שייכת למרחב העמודות של A (כלומר העמודה b היא צרוף ליניארי של עמודות A). לפי הנתון, למערכת Ax = b יש פתרון אם"ם בווקטור b יש שני רכיבים השווים ל- 0, ובפרט, אם b שייך למרחב העמודות של A אז בהכרח ל- b יש שני רכיבים שהם 0, כלומר, לכל וקטור במרחב העמודות של A יש שני רכיבים שהם 0, לכן, מימד מרחב העמודה של A הוא לכל היותר 3. אך מימד מרחב העמודות של מטריצה שווה למימד מרחב השורות של המטריצה, ולכן $r(A) \leq 3$.

2. נתון כי למערכת Ax = b יש פתרון אם"ם בווקטור b הרכיב השני והרביעי שווים ל- 0. נראה כי מנתון זה נובע כי בהכרח השורה השנייה והשורה הרביעית של A שוות ל- 0:

נסתכל על המערכת: Ax = b כאשר b הוא העמודה הראשונה של A. למערכת זו יש פתרון והוא:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

לפי הנתון, אם למערכת יש פתרון, אז בהכרח הרכיב השני והרביעי של b הם 0, כלומר הרכיב השני והרביעי בעמודה הראשונה של A הם 0. באותו אופן (ע"י פתירת המערכות Ax = b כאשר b הוא העמודה ה-j-ית של A) נקבל שבכל עמודה של A הרכיב השני והרביעי הם 0, כלומר השורה השנייה והשורה הרביעית של A הן שורות אפסים, ולכן $r(A) \leq 3$.

3. נניח בשלילה כי $r(A^T)$ לא קטנה ממש מ- 4, כלומר $r(A^T) = r(A) = 4$ (כי, כאמור $r(A^T) = r(A)\leq 4$.

אם $r(A) = 4$, פירושו של דבר (לפי הגדרת דרגה של מטריצה) כי ל- A יש 4 שורות בלתי תלויות ליניארית ושורה אחת התלויה ליניארית באחרות. נסמן ב- R_i את השורות של A וב- S_i את השורות של המטריצה

המורחבת $(A|b)$. נניח כי השורה התלויה של A היא R_k. מאחר ולמערכת הלא הומוגנית יש פתרון, הרי שגם S_k הוא קומבינציה ליניארית של שורות $(A|b)$ (אחרת השורה R_k תתאפס ואילו S_k לא כלומר למערכת אין פתרון), כלומר קיימים סקלרים כך ש- $S_k = \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + ... + \alpha_{k+1} S_{k+1} + ... + \alpha_5 S_5$, ובפרט,

$b_k = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + ... + \alpha_{k+1} b_{k+1} + ... + \alpha_5 b_5$.

נניח כי $k \neq 2,4$, אז לכל b_2, b_4 למערכת הנ"ל יהיה פתרון ולאו דווקא עבור $b_2 = b_4 = 0$.

נניח כי $k = 2$, אז לכל b_4 למערכת הנ"ל יהיה פתרון ולאו דווקא עבור $b_4 = 0$.

נניח כי $k = 4$, אז לכל b_2 למערכת הנ"ל יהיה פתרון ולאו דווקא עבור $b_2 = 0$.

לכן, לא יתכן כי $r(A) = 4$, ומכאן כי $r(A) \leq 3$ כנדרש.

<u>שאלה 5 (20%).</u>

נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases} x+y+z=-1 \\ 2x+3y+4z=-1 \\ -3x+y+(\alpha-\beta+5)z=\alpha+\beta+7 \end{cases}$, באשר α, β פרמטרים ממשיים.

(א) מצא את כל ערכי α, β אשר עבורם למערכת אין פתרון.

(ב) מצא את כל ערכי α, β אשר עבורם למערכת יש פתרון אחד ויחיד.

(ג) מצא את כל ערכי α, β אשר עבורם למערכת יש אינסוף פתרונות.

(ד) רשום את רכיב z של הפתרון כאשר הפתרון הוא יחיד.

(ה) רשום את הפתרון הכללי כאשר יש אינסוף פתרונות.

<u>פתרון:</u>

ראשית, נדרג את מטריצת המקדמים המורחבת.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ -3 & 1 & \alpha-\beta+5 & \alpha+\beta+7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & \alpha-\beta+8 & \alpha+\beta+4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-\beta & \alpha+\beta \end{array}\right)$$

ב. כדי שלמערכת יהיה פתרון יחיד, נדרוש: $r(A|b) = r(A) = 3$: $\alpha-\beta \neq 0$ כלומר $\alpha \neq \beta$.

א. כדי שלמערכת לא יהיה פתרון, נדרוש: $r(A|b) > r(A)$: $\alpha-\beta = 0$ וגם $\alpha+\beta \neq 0$, כלומר $\alpha = \beta \neq 0$.

ג. כדי שלמערכת יהיו אינסוף פתרונות, נדרוש: $r(A|b) = r(A) < 3$: $\alpha-\beta = 0$ וגם $\alpha+\beta = 0$, כלומר $\alpha = \beta = 0$.

ד. כאמור בסעיף א', למערכת יש פתרון יחיד אם"ם $\alpha-\beta \neq 0$, לכן, עבור $\alpha-\beta \neq 0$ נקבל, לפי השורה האחרונה במטריצה המורחבת המדורגת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-\beta & \alpha+\beta \end{array}\right)$$

$$(\alpha-\beta)z = \alpha+\beta \quad , \quad \alpha-\beta \neq 0$$
$$z = \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$$

ה. כאמור בסעיף ג', למערכת יש אינסוף פתרונות אם"ם $\alpha = \beta = 0$. נציב במטריצה המורחבת המדורגת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-\beta & \alpha+\beta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x - z = -2 \\ y + 2z = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -2 + z \\ y = 1 - 2z \end{cases}$$

$$(x, y, z) = (-2+z \ , \ 1-2z \ , \ z)$$

<u>שאלה 6 (13%).</u>

U ו- W הם שני התת-מרחבים הבאים של R^4: $U = span\{(2,2,1,-3),(-\lambda,1-\lambda,-1,4)\}$

באשר λ מספר ממשי, ו- W הוא מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $\begin{cases} x+y+z \quad =0 \\ y+2z-2t=0 \end{cases}$.

חשב את הערך של λ אשר עבורו מתקיים $\dim(U \cap W)=1$, ומצא בסיס ל- $U \cap W$ במקרה זה.

<u>פתרון:</u>

למציאת איבר כללי ל- $U \cap W$, נמצא איבר כללי למרחב U (קומבינציה ליניארית של הקבוצה הפורשת), ונאלץ על איבר זה את תנאי W (המשוואות ההומוגניות הנתונות):

$$U = span\{(2,2,1,-3),(-\lambda,1-\lambda,-1,4)\} = \left\{a(2,2,1,-3)+b(-\lambda,1-\lambda,-1,4) \,\middle|\, a,b \in R\right\} =$$

כלומר, איבר כללי למרחב U הוא: $(2a-\lambda b, 2a+(1-\lambda)b, a-b, -3a+4b)$.

נאלץ על איבר זה את תנאי המרחב W :

$$\begin{cases} 2a-\lambda b+2a+(1-\lambda)b+a-b=0 \\ 2a+(1-\lambda)b+2(a-b)-2(-3a+4b)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a-2\lambda b=0 \\ 10a-9b-\lambda b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a-2\lambda b=0 \\ 10a-b(9+\lambda)=0 \end{cases}$$

מאחר ומימד החיתוך הוא 1 ומספר הנעלמים הוא 2, נדרוש שדרגת מטריצת המקדמים תהייה 1 כלומר שהמשוואות יהיו פרופורציונאליות:

$$\frac{5}{10}=\frac{-2\lambda}{-(9+\lambda)}$$

$$5(9+\lambda)=20\lambda$$
$$45+5\lambda=20\lambda$$
$$45=15\lambda$$
$$\lambda=3$$

נציב במשוואה λ = 3 (מספיק להציב במשוואה אחת שכן המשוואות פרופורציונאליות) ונקבל: $5a = 6b$ או $a=\frac{6}{5}b$. נמצא בסיס ע"י מציאת וקטור ספציפי בחיתוך: נציב $b = 5$ ואז $a = 6$ ובסיס הוא: {(-3, 2, 1, 2)}.